

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전재하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

제10장 이산 시간 푸리에 급수

[Quick Review]

※ 다음 문제에서 옳은 것을 골라라.

(1) $\cos(0.4\pi n)$ 과 $\cos(4.4\pi n)$ 은 서로 다른 신호이다. (○, ×)

Ans) ×

(2) 이산 정현파가 가질 수 있는 최대 각주파수는 $(2\pi, \infty)$ 이다.

Ans) 2π

(3) 실수 이산 신호의 스펙트럼은 (주기, 비주기) 함수이다.

Ans) 주기

(4) 이산 신호 스펙트럼은 2π 의 주파수 범위 내에서만 서로 다른 주파수 성분으로 구분할 수 있다. (○, ×)

Ans) ○

(5) 이산 신호의 스펙트럼의 반복 주기는 연속 신호의 (기본, 샘플링) 주파수에 해당한다.

Ans) 샘플링

(6) 이산 실수 신호의 스펙트럼은 $0 \leq \Omega \leq \pi$ 에서만 나타내도 충분하다. (○, ×)

Ans) ○

(7) 이산 주기 신호의 주파수 성분은 주기 N 개 보다 많을 수 없다. (○, ×)

Ans) ○

(8) 이산 주기 신호의 고조파는 복소평면의 (단위원, 허축)에 (등간격, 임의)로 존재한다.

Ans) 단위원, 등간격

(9) DTFS는 디리클레 조건과 같은 별도의 수렴 조건을 요구한다. (○, ×)

Ans) ×

(10) DTFS는 항상 $[0, N-1]$ 의 주기 구간에 대해서 계산을 수행해야 한다. (○, ×)

Ans) ×

(11) 이산 실수 신호의 스펙트럼은 최소한 (반주기, 한 주기, 전주파수)에서 주어지면 된다.

Ans) 반주기

(12) 이산 시간 푸리에 급수의 계수는 일반적으로 (실수, 복소수)이다.

Ans) 복소수

(13) 이산 실수 신호의 스펙트럼은 반주기점($\Omega = \pm\pi$)에 대해서도 대칭성이 그대로 성립한다. (○, ×)

Ans) ○

(14) 스펙트럼으로부터 이산 N -주기 신호를 합성하려면, (연속되는 N 개, 무한개) 주파수 성분을 더해야 한다.

Ans) 연속되는 N 개

(15) 연속이든 이산이든 상관없이 주기 신호의 스펙트럼은 선 스펙트럼이다. (○, ×)

Ans) ○

(16) 이산 주기 신호의 DTFS의 푸리에 계수 X_k 는 N -주기 함수이다. (○, ×)

Ans) ○

(17) 신호를 시간축 상에서 이동시키면 (진폭, 위상) 스펙트럼이 변화한다.

Ans) 위상

(18) 실수 주기 신호의 푸리에 계수는 공액 대칭을 만족한다. (○, ×)

Ans) ○

(19) 이산 주기 신호의 전력은 시간 파형을 알아야만 계산할 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(20) 이산 주기 신호의 고조파끼리는 서로 전력을 형성한다. (○, ×)

Ans) ×

[기초 문제]

10.1 다음과 같은 이산 신호가 주기 $N=4$ 로 반복되는 이산 주기 신호 $x[n]$ 의 이산 시간 푸리에 급수를 구하라.

(a) $\begin{matrix} \uparrow \\ [1, 2, 1, 0] \end{matrix}$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\pi k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(1 + 2 + 1) = 1$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi}) = -j\frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\pi} + e^{-j2\pi}) = 0$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j3\pi}) = j\frac{1}{2}$$

(b) $\begin{matrix} \uparrow \\ [-1, 2, -1, 0] \end{matrix}$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(-1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\pi k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(-1 + 2 - 1) = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(-1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\pi}) = -j\frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{1}{4}(-1 + 2e^{-j\pi} - e^{-j2\pi}) = -1$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(-1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} - e^{-j3\pi}) = j\frac{1}{2}$$

(c) $\begin{matrix} \uparrow \\ [1, 1, 0, 0] \end{matrix}$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4} (1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$X_1 = \frac{1}{4} (1 + e^{-j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{4} - j\frac{1}{4}$$

$$X_2 = \frac{1}{4} (1 + e^{-j\pi}) = 0$$

$$X_3 = \frac{1}{4} (1 + e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4}$$

(d) $\begin{matrix} \uparrow \\ [0, 0, 1, 1] \end{matrix}$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4} (e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi}{2}k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$X_1 = \frac{1}{4} (e^{-j\pi} + e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = -\frac{1}{4} + j\frac{1}{4}$$

$$X_2 = \frac{1}{4} (e^{-j2\pi} + e^{-j3\pi}) = 0$$

$$X_3 = \frac{1}{4} (e^{-j3\pi} + e^{-j\frac{9\pi}{2}}) = -\frac{1}{4} - j\frac{1}{4}$$

(e) $\begin{matrix} \uparrow \\ [2, -1, 1, 2] \end{matrix}$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4} (2 - e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\pi k} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4} (2 - 1 + 1 + 2) = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{4} (2 - e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1}{4} (2 - j1 - 1 + j2) = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4}$$

$$X_2 = \frac{1}{4} (2 - e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} + 2e^{-j3\pi}) = \frac{1}{4} (2 + 1 + 1 - 2) = \frac{1}{2}$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(2 - e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j3\pi} + 2e^{-j\frac{9\pi}{2}}) = \frac{1}{4}(2 + j1 - 1 - j2) = \frac{1}{4} - j\frac{1}{4}$$

(f) $\begin{bmatrix} 1, & 2, & -2, & 3 \end{bmatrix}$
 $\uparrow$

Ans) 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} - 2e^{-j\pi k} + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}k})$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(1 + 2 - 2 + 3) = 1$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} - 2e^{-j\pi} + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1}{4}(1 - j2 + 2 + j3) = \frac{3}{4} + j\frac{1}{4}$$

$$X_2 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\pi} - 2e^{-j2\pi} + 3e^{-j3\pi}) = \frac{1}{4}(1 - 2 - 2 - 3) = -\frac{3}{2}$$

$$X_3 = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} - 2e^{-j3\pi} + 3e^{-j\frac{9\pi}{2}}) = \frac{1}{4}(1 + j2 + 2 - j3) = \frac{3}{4} - j\frac{1}{4}$$

10.2 다음과 같은 이산 주기 신호에 대해서 이산 시간 푸리에 급수의 계수를 구하고, 진폭 및 위상 스펙트럼을 그려라.

(a) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right)$

Ans) 주기와 주파수를 구하면 $\Omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{\pi}{4}$, $N = 8$

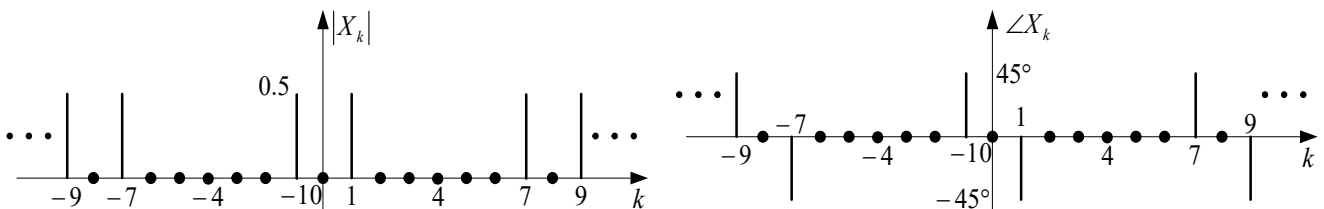
$$x[n] = \sum_{k=0}^7 X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\pi(n-1)}{4}} + e^{-j\frac{\pi(n-1)}{4}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4} \right) e^{j\frac{\pi}{4}n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4} \right) e^{j\frac{7\pi}{4}n}$$

$$\therefore X_1 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_7 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_k = 0, \quad k = 0, 2, 3, 4, 5, 6$$



(b) $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{2}(n-1)\right)$

Ans) 주기와 주파수를 구하면 $\Omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{3\pi}{2}$, $N = \frac{2\pi}{\Omega_0}k = 4$

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{3\pi}{2}n}$$

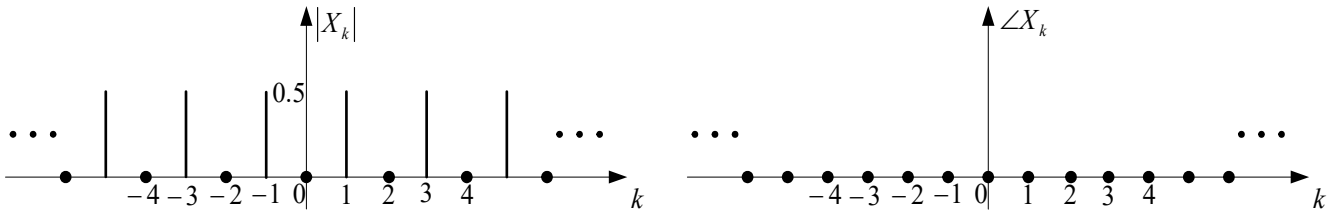
$$x[n] = \frac{1}{j2} \left(e^{j\frac{3\pi(n-1)}{2}} - e^{-j\frac{3\pi(n-1)}{2}} \right) = \frac{1}{2} e^{j\frac{3\pi}{2}n} + \frac{1}{2} e^{j3\frac{3\pi}{2}n}$$

$$\therefore X_0 = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = \frac{1}{2}$$



(c) $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}n\right)$

Ans) 주기와 기본 주파수는 $N = 12$, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{6}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{11} X_k e^{jk\frac{\pi}{6}n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{-j\frac{2\pi}{3}n} \right) + \frac{1}{j2} \left(e^{j\frac{2\pi}{4}n} - e^{-j\frac{2\pi}{4}n} \right) = \frac{1}{2} e^{j4\frac{\pi}{6}n} + \frac{1}{2} e^{j8\frac{\pi}{6}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j3\frac{\pi}{6}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j9\frac{\pi}{6}n}$$

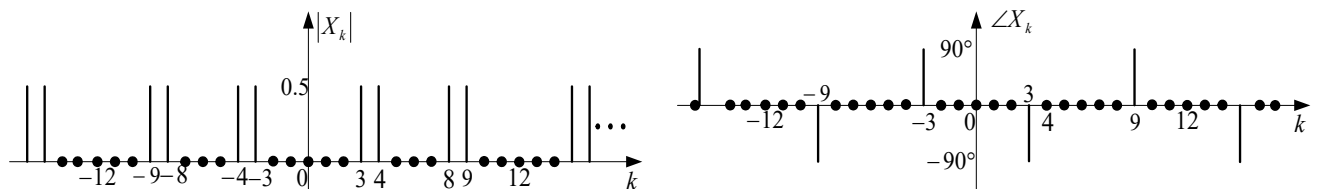
$$\therefore X_3 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$X_4 = \frac{1}{2}$$

$$X_8 = \frac{1}{2}$$

$$X_9 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$X_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 11, \quad k \neq 3, 4, 8, 9$$



(d) $x[n] = (0.5)^{|n|}$, $-2 \leq n \leq 3$, $N=6$

Ans) 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{3}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^5 X_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$X_k = \frac{1}{6} \sum_{n=-2}^3 (0.5)^{|n|} e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} e^{jk\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{2} e^{jk\frac{\pi}{3}} + 1 + \frac{1}{2} e^{-jk\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{4} e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{8} e^{-jk\frac{3\pi}{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + 1 + (-1)^k \frac{1}{8} \right)$$

$$\therefore X_0 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{16}$$

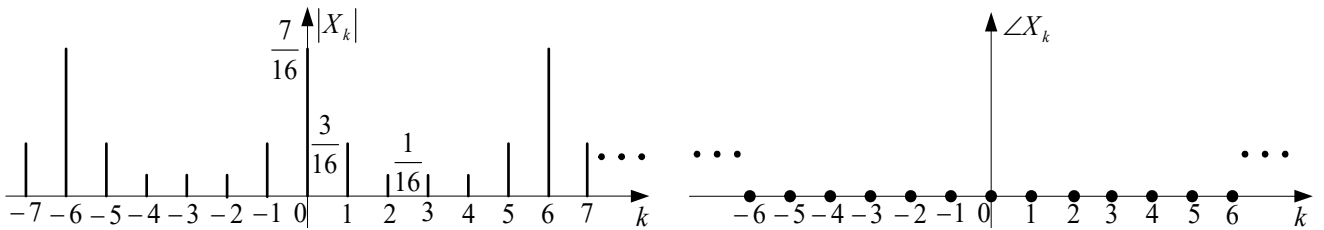
$$X_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{16}$$

$$X_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{16}$$

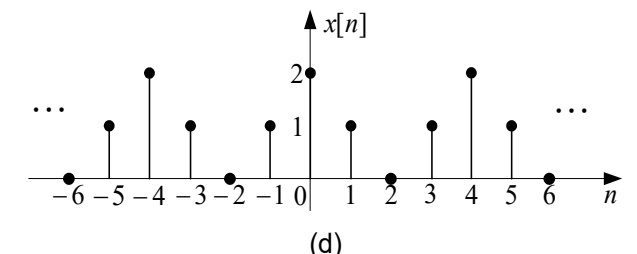
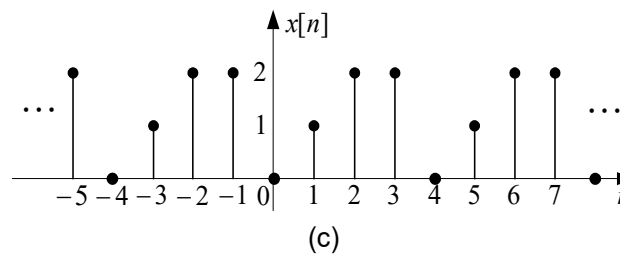
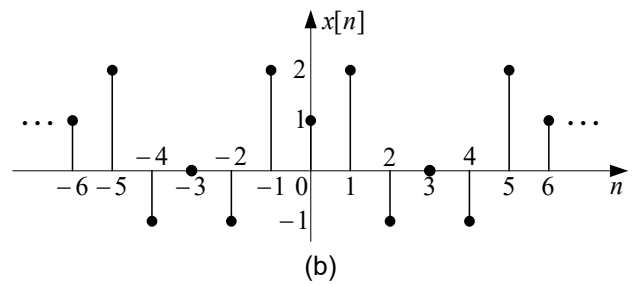
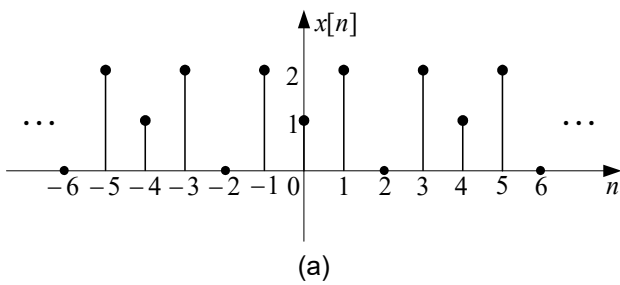
$$X_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + 1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{16}$$

$$X_4 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{16}$$

$$X_5 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{16}$$



10.3 다음 그림의 이산 주기 신호에 대한 DTFS를 구하고 진폭 및 위상 스펙트럼을 그려라.



(a)

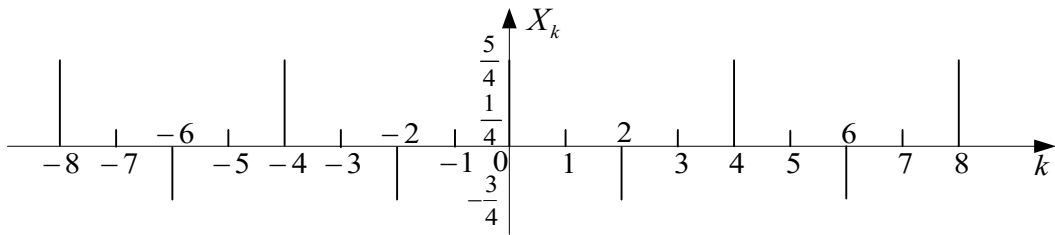
Ans) 주기 $N = 4$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=-2}^1 x[n] e^{-jk \frac{\pi}{2} n} = \frac{1}{4} \left(1 + 4 \cos \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$X_0 = \frac{1}{4} \left(1 + 4 \cos \frac{0\pi}{2} \right) = \frac{5}{4} \quad X_2 = \frac{1}{4} \left(1 + 4 \cos \frac{2\pi}{2} \right) = -\frac{3}{4}$$

$$X_1 = \frac{1}{4} \left(1 + 4 \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \quad X_3 = \frac{1}{4} \left(1 + 4 \cos \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

푸리에 계수 X_k 는 모두 실수이므로 진폭과 위상 스펙트럼 구분 없이 나타내도 무방하다.



(b)

Ans) 주기 $N = 6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$$X_k = \frac{1}{6} \sum_{n=-2}^1 x[n] e^{-jk \frac{\pi}{3} n} = \frac{1}{6} \left(1 + 4 \cos(k \frac{\pi}{3}) - 2 \cos(2k \frac{\pi}{3}) \right)$$

$$X_0 = \frac{1}{6} (1 + 4 \cos(0 \frac{\pi}{3}) - 2 \cos(2 \cdot 0 \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{6} (1 + 4 - 2) = \frac{1}{2}$$

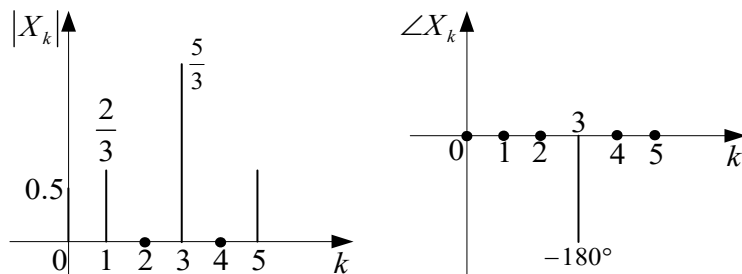
$$X_1 = \frac{1}{6} (1 + 4 \cos(\frac{\pi}{3}) - 2 \cos(2 \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{6} (1 + 2 + 1) = \frac{2}{3}$$

$$X_2 = \frac{1}{6} (1 + 4 \cos(2 \frac{\pi}{3}) - 2 \cos(4 \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{6} (1 - 2 + 1) = 0$$

$$X_3 = \frac{1}{6} (1 + 4 \cos(3 \frac{\pi}{3}) - 2 \cos(6 \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{6} (1 - 4 - 2) = -\frac{5}{3}$$

$$X_4 = \frac{1}{6} (1 + 4 \cos(4 \frac{\pi}{3}) - 2 \cos(8 \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{6} (1 - 2 + 1) = 0$$

$$X_5 = \frac{1}{6} (1 + 4 \cos(5 \frac{\pi}{3}) - 2 \cos(10 \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{6} (1 + 2 + 1) = \frac{2}{3}$$



(c)

Ans) 주기 $N = 4$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

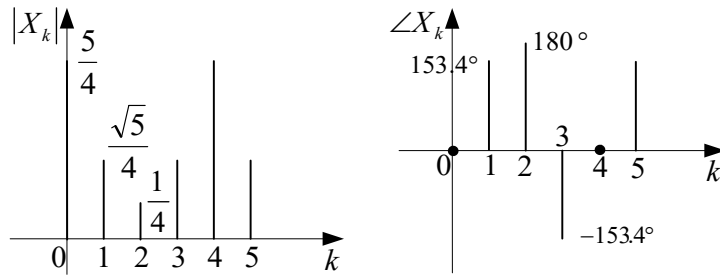
$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4} \left(e^{-j\frac{k\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{2k\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{3k\pi}{2}} \right)$$

$$X_0 = \frac{1}{4} \left(e^{-j0\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j0\frac{2\pi}{2}} + 2e^{-j0\frac{3\pi}{2}} \right) = \frac{5}{4}$$

$$X_1 = \frac{1}{4} \left(e^{-j1\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j1\frac{2\pi}{2}} + 2e^{-j1\frac{3\pi}{2}} \right) = \frac{1}{4}(-j-2+j2) = -\frac{1}{4}(2-j) = \frac{\sqrt{5}}{4} e^{j153.4^\circ}$$

$$X_2 = \frac{1}{4} \left(e^{-j2\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j2\frac{2\pi}{2}} + 2e^{-j2\frac{3\pi}{2}} \right) = \frac{1}{4}(-1+2-2) = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^{j180^\circ}$$

$$X_3 = \frac{1}{4} \left(e^{-j3\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j3\frac{2\pi}{2}} + 2e^{-j3\frac{3\pi}{2}} \right) = \frac{1}{4}(j-2-j2) = -\frac{1}{4}(2+j) = \frac{\sqrt{5}}{4} e^{-j153.4^\circ}$$



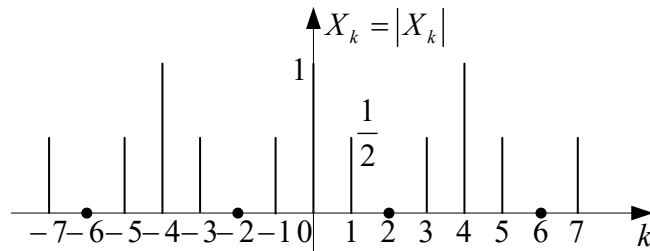
(d)

Ans) 주기 $N=4$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=-2}^1 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$X_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{0\pi}{2} \right) = 1 \quad X_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{2} \right) = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad X_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}$$



10.4 다음과 같은 이산 주기 신호의 이산 시간 푸리에 급수를 구하라.

(a) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$ & 주기 $N=4$

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\pi(2n-1)}{4}} + e^{-j\frac{\pi(2n-1)}{4}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (1-j) e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{\sqrt{2}}{4} (1+j) e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

$$\therefore X_1 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_3 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_0 = X_2 = 0$$

(b) $x[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{3}\right)$

Ans) 이산 정현파의 주기 $N=4$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$x[n] = 1 + \frac{1}{j2} e^{j(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{3})} - \frac{1}{j2} e^{-j(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{3})} = 1 + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

$$\therefore X_0 = 1$$

$$X_1 (= X_{-3}) = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 (= X_{-1}) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

(c) $x[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

Ans) 주기 $N=24$, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{12}$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^{23} X_k e^{jk\frac{\pi}{12}n}$$

$$x[n] = \left(e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{-j\frac{3\pi}{4}n} \right) + \frac{1}{j2} \left(e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{\pi}{3}n} \right)$$

$$= e^{j\frac{9\pi}{12}n} + e^{-j\frac{9\pi}{12}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{4\pi}{12}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{4\pi}{12}n}$$

$$\therefore X_4 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$X_9 = 1$$

$$X_{15} (= X_{-9}) = 1$$

$$X_{20} (= X_{-4}) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$X_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 23, \quad k \neq 4, 9, 15, 20$$

(d) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-2)\right)$

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^7 X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} \\
 x[n] &= \frac{1}{2} \left(e^{j(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4})} + e^{-j(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4})} \right) - \frac{1}{2} \left(e^{j(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2})} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{2-\sqrt{2}}{4} \right) e^{j\frac{\pi}{4}n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{2-\sqrt{2}}{4} \right) e^{-j\frac{\pi}{4}n} \\
 \therefore X_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{2-\sqrt{2}}{4} \\
 X_{-1} = X_7 &\equiv \frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{2-\sqrt{2}}{4} \\
 X_k &= 0, \quad k = 0, 2, 3, 4, 5, 6
 \end{aligned}$$

(e) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & 3 \leq n \leq 7 \end{cases}, \quad N=8$

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^7 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n} \\
 X_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{4}n} = \frac{1}{8} \left(1 + e^{-jk\frac{\pi}{4}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}} \right) \\
 X_0 &= \frac{1}{8} (1 + 1 + 1) = \frac{3}{8} \\
 X_1 &= \frac{1}{8} (1 + e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} - j1 \right) = \frac{2+\sqrt{2}}{16} (1 - j1) \\
 X_2 &= \frac{1}{8} (1 + e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi}) = -j\frac{1}{8} \\
 X_3 &= \frac{1}{8} (1 + e^{-j\frac{3\pi}{4}} + e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} + j1 \right) = \frac{2-\sqrt{2}}{16} (1 + j1) \\
 X_4 &= \frac{1}{8} (1 + e^{-j\pi} + e^{-j2\pi}) = \frac{1}{8} \\
 X_5 &= \frac{1}{8} (1 + e^{-j\frac{5\pi}{4}} + e^{-j\frac{5\pi}{2}}) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} - j1 \right) = \frac{2-\sqrt{2}}{16} (1 - j1) \\
 X_6 &= \frac{1}{8} (1 + e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j3\pi}) = j\frac{1}{8} \\
 X_7 &= \frac{1}{8} (1 + e^{-j\frac{7\pi}{4}} + e^{-j\frac{7\pi}{2}}) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} + j1 \right) = \frac{2+\sqrt{2}}{16} (1 + j1)
 \end{aligned}$$

(f) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(n-m) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$

Ans) 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{3}$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^5 X_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

한 주기에 대해 $x'[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(n-m)$ 을 다시 쓰면 $x'[n] = [1, (-1), 1, (-1), 1, (-1)]$

$$X'_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 (-1)^n e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6} \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{3}k}} = 0, \quad k=0, 1, \dots, 5, k \neq 3$$

$$X'_3 = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 (-1)^{2n} = 1$$

$$x''[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{-j\frac{2\pi}{3}n} \right) = \frac{1}{2} e^{j2\frac{\pi}{3}n} + \frac{1}{2} e^{j4\frac{\pi}{3}n} = X''_2 e^{j2\Omega_0 n} + X''_4 e^{j4\Omega_0 n}$$

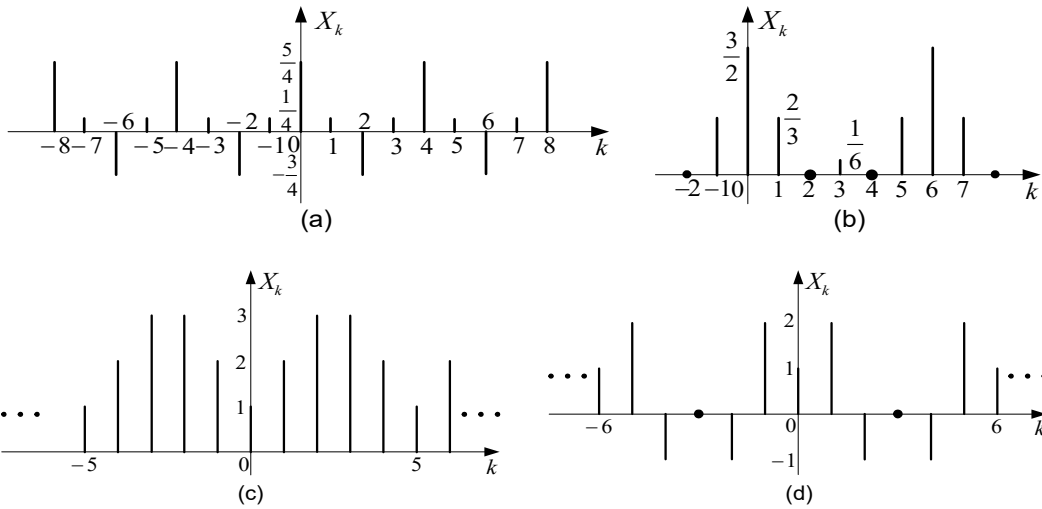
$$X_k = X'_k + X''_k$$

$$X_0 = X_1 = X_5 = 0$$

$$X_2 = X_4 = \frac{1}{2}$$

$$X_3 = 1$$

10.5 다음 그림과 같이 스펙트럼이 주어질 때, 이로부터 대응되는 이산 신호를 구하라.



(a)

Ans) X_k 의 주기는 $N=4 \rightarrow$ 신호의 주기 $N=4$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$X_0 = \frac{5}{4}, X_1 = \frac{1}{4}, X_2 = -\frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$x[n] = |X_0| e^{j\angle X_0} + 2|X_1| \cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + |X_2| e^{j(2\Omega_0 n + \angle X_2)} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \frac{3}{4}(-1)^n$$

(b)

Ans) X_k 의 주기는 $N=6 \rightarrow$ 신호의 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$$X_0 = \frac{3}{2}, \quad X_1 = \frac{2}{3}, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = \frac{1}{6} \text{ 이므로}$$

$$x[n] = |X_0|e^{j\angle X_0} + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + |X_3|e^{j(3\Omega_0 n + \angle X_3)} = \frac{3}{2} + (-1)^n \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

(c)

Ans) X_k 의 주기는 $N=5 \rightarrow$ 신호의 주기 $N=5$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{5}$

$$X_0 = 1, \quad X_1 = 2, \quad X_2 = 3 \text{ 이므로}$$

$$x[n] = |X_0|e^{j\angle X_0} + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + 2|X_2|\cos(2\Omega_0 n + \angle X_2) = 1 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + 6\cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

(d)

Ans) X_k 의 주기는 $N=6 \rightarrow$ 신호의 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$$X_0 = 1, \quad X_1 = 2, \quad X_2 = -1 = 1e^{j\pi}, \quad X_3 = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= |X_0|e^{j\angle X_0} + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + 2|X_2|\cos(2\Omega_0 n + \angle X_2) \\ &= 1 + 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \end{aligned}$$

10.6 이산 주기 신호 $x[n]$ 의 DTFS 계수가 다음과 같을 때, 이에 대응하는 $x[n]$ 을 구하라.

$$(a) \quad X_k = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \delta[k-3], \quad 0 \leq k \leq 3, \quad N=4$$

Ans) 주기 $N=4$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} = 1 + e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{j2\frac{\pi}{2}n} + e^{j3\frac{\pi}{2}n} = 1 + (-1)^n (1 + 2\cos(\frac{\pi}{2}n))$$

한 주기의 $x[n]$ 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x[0] &= 4 \\ x[1] &= 0 \\ x[2] &= 0 \\ x[3] &= 0 \end{aligned}$$

$$(b) \quad X_k = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \delta[k-3], \quad 0 \leq k \leq 7, \quad N=8$$

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^7 X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} = 1 + e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{j2\frac{\pi}{4}n} + e^{j3\frac{\pi}{4}n} = 1 + (j)^n (1 + 2\cos(\frac{\pi}{4}n))$$

한 주기의 $x[n]$ 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x[0] &= 4 \\ x[1] &= 1 + j(1 + \sqrt{2}) \\ x[2] &= 0 \\ x[3] &= 1 - j(1 - \sqrt{2}) \\ x[4] &= 0 \\ x[5] &= 1 + j(1 - \sqrt{2}) \\ x[6] &= 0 \\ x[7] &= 1 - j(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$(c) \quad X_k = \delta[k] + \delta[k-2] + \delta[k-4] + \delta[k-6], \quad 0 \leq k \leq 7, \quad N=8$$

Ans) $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^7 X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} = 1 + e^{j2\frac{\pi}{4}n} + e^{j4\frac{\pi}{4}n} + e^{j6\frac{\pi}{4}n} = 1 + (-1)^n (1 + 2\cos(\frac{\pi}{2}n))$$

한 주기의 $x[n]$ 값은 다음과 같다.

$$\begin{array}{ll} x[0] = 4 & x[4] = 4 \\ x[1] = 0 & x[5] = 0 \\ x[2] = 0 & x[6] = 0 \\ x[3] = 0 & x[7] = 0 \end{array}$$

(d) $X_k = \delta[k-1] + \delta[k-3] + \delta[k-5] + \delta[k-7], \quad 0 \leq k \leq 7, \quad N=8$

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^7 X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} = e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{j3\frac{\pi}{4}n} + e^{j5\frac{\pi}{4}n} + e^{j7\frac{\pi}{4}n} = 4(-1)^n \cos(\frac{\pi}{4}n) \cos(\frac{\pi}{2}n)$$

한 주기의 $x[n]$ 값은 다음과 같다.

$$\begin{array}{ll} x[0] = 4 & x[4] = -4 \\ x[1] = 0 & x[5] = 0 \\ x[2] = 0 & x[6] = 0 \\ x[3] = 0 & x[7] = 0 \end{array}$$

10.7 이산 주기 신호 $x[n]$ 의 DTFS 계수가 다음과 같을 때, 이에 대응하는 $x[n]$ 을 구하라.

(a) $X_k = 1 + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}k) + \cos(\frac{\pi}{4}k)$

Ans) 푸리에 계수의 주기와 기본 주파수는

$$N = N_1 \text{ 과 } N_2 \text{의 최소공배수} = 8, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$$

$$X_k = 1 + \frac{1}{4}(e^{j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k}) + (e^{j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{4}k}) = 1 + e^{-j\frac{\pi}{4}k} + \frac{1}{4}e^{-j2\frac{\pi}{4}k} + \frac{1}{4}e^{-j6\frac{\pi}{4}k} + e^{-j7\frac{\pi}{4}k}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$\therefore \begin{array}{l} x[0] = 8 \\ x[1] = 8 \\ x[2] = 2 \\ x[3] = 0 \\ x[4] = 0 \\ x[5] = 0 \\ x[6] = 2 \\ x[7] = 8 \end{array}$$

(b) $X_k = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6}k) + \frac{1}{3}\cos(\frac{\pi}{2}k)$

Ans) 푸리에 계수의 주기와 기본 주파수는

$$N = N_1 \text{ 과 } N_2 \text{의 최소공배수} = 12, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{6}$$

$$X_k = \frac{1}{j4}(e^{j\frac{\pi}{6}k} - e^{-j\frac{\pi}{6}k}) + \frac{1}{6}(e^{j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k}) = j\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{6}k} + \frac{1}{6}e^{-j3\frac{\pi}{6}k} + \frac{1}{6}e^{-j9\frac{\pi}{6}k} - j\frac{1}{4}e^{-j11\frac{\pi}{6}k}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{11} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{6}n}$$

$$\therefore \begin{cases} x[0] = 0 \\ x[1] = j3 \\ x[2] = 0 \\ x[3] = 2 \\ x[4] = 0 \\ x[5] = 0 \\ x[6] = 0 \\ x[7] = 0 \\ x[8] = 0 \\ x[9] = 2 \\ x[10] = 0 \\ x[11] = -j3 \end{cases}$$

(c) $X_k = \cos(\frac{\pi}{4}k) + 2\sin(\frac{3\pi}{4}k), \quad 0 \leq k \leq 7, \quad N=8$

Ans) 푸리에 계수의 주기와 기본 주파수는

$$N=8, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$$

$$X_k = \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{4}k}) + \frac{1}{j}(e^{j\frac{3\pi}{4}k} - e^{-j\frac{3\pi}{4}k}) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k} + je^{-j3\frac{\pi}{4}k} - je^{-j5\frac{\pi}{4}k} + \frac{1}{2}e^{-j7\frac{\pi}{4}k}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$\therefore \begin{cases} x[0] = 0 \\ x[1] = 4 \\ x[2] = 0 \\ x[3] = j8 \\ x[4] = 0 \\ x[5] = -j8 \\ x[6] = 0 \\ x[7] = 4 \end{cases}$$

(d) $X_k = (-1)^k$

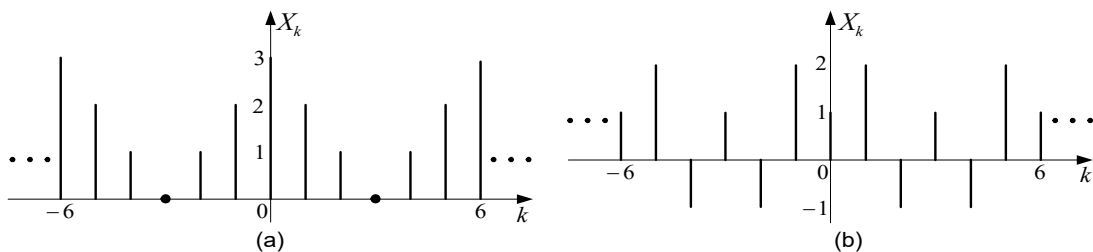
Ans) 주기 $N=2$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \pi$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^1 X_k e^{jk\pi n} = 1 - e^{j\pi n} = 1 - (-1)^n$$

한 주기의 $x[n]$ 값은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x[0] = 0 \\ x[1] = 2 \end{cases}$$

10.8 이산 주기 신호 $x[n]$ 의 DTFS 계수가 다음 그림과 같을 때, 물음에 답하라.



(1) $n=0$ 에서의 $x[n]$ 의 값 $x[0]$ 를 구하라.

(2) $x[n-3]$ 의 푸리에 계수를 구하라.

(a)

Ans) 그림으로부터 이 주기 신호의 주기는 $N=6$ 이다.

$$(1) x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \rightarrow x[0] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k$$

$$\therefore x[0] = \sum_{k=0}^5 X_k = 3 + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 9$$

$$(2) X'_k = e^{-j \frac{2\pi}{6} 3k} X_k = e^{-j\pi k} X_k = (-1)^k X_k$$

$$X'_0 = X_0 = 3$$

$$X'_1 = -X_1 = -2$$

$$X'_2 = X_2 = 1$$

$$X'_3 = -X_3 = 0$$

$$X'_4 = X_4 = 1$$

$$X'_5 = -X_5 = -2$$

(b)

Ans) 그림으로부터 이 주기 신호의 주기는 $N=6$ 이다.

$$(1) x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \rightarrow x[0] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k$$

$$\therefore x[0] = \sum_{k=0}^5 X_k = 1 + 2 - 1 + 1 - 1 + 2 = 4$$

$$(2) X'_k = e^{-j \frac{2\pi}{6} 3k} X_k = e^{-j\pi k} X_k = (-1)^k X_k$$

$$X'_0 = X_0 = 1$$

$$X'_1 = -X_1 = -2$$

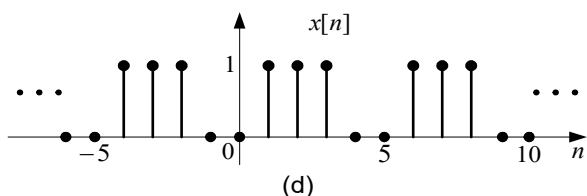
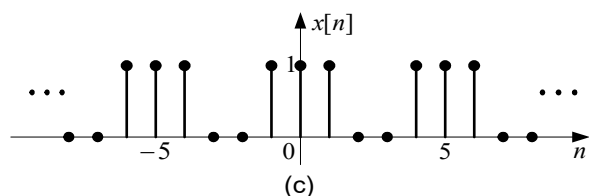
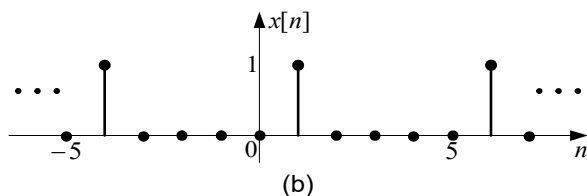
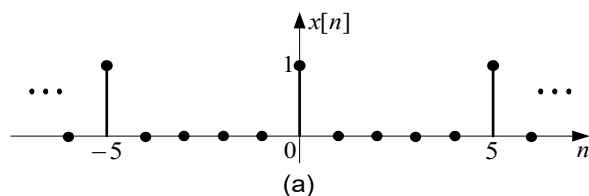
$$X'_2 = X_2 = 1$$

$$X'_3 = -X_3 = -1$$

$$X'_4 = X_4 = 1$$

$$X'_5 = -X_5 = -2$$

10.9 다음 그림과 같은 이산 주기 신호에 대해서 이산 시간 푸리에 급수의 계수를 구하라.



(a)

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-2}^2 x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{5} \sum_{n=-2}^2 \delta[n] e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} = \frac{1}{5}$$

(b)

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-2}^2 x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{5} \sum_{n=-2}^2 \delta[n-1] e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} = \frac{1}{5} e^{-j\frac{2\pi}{5}k}$$

(c)

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-1}^1 x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{5} \sum_{n=-1}^1 e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} \\ &= \frac{1}{5} (e^{j\frac{2\pi}{5}k} + 1 + e^{-j\frac{2\pi}{5}k}) = \frac{1}{5} + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) \end{aligned}$$

(d)

Ans) 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-1}^3 x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{5} \sum_{n=-1}^3 e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} = \frac{1}{5} e^{-j\frac{4\pi}{5}k} (1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}k)) \\ &= \frac{1}{5} \frac{e^{-j\frac{5\pi}{5}k} (e^{j\frac{3\pi}{5}k} - e^{-j\frac{3\pi}{5}k})}{e^{-j\frac{\pi}{5}k} (e^{j\frac{\pi}{5}k} - e^{-j\frac{\pi}{5}k})} = \frac{1}{5} e^{-j\frac{4\pi}{5}k} \frac{\sin(\frac{3\pi}{5}k)}{\sin(\frac{\pi}{5}k)} \end{aligned}$$

10.10 파스발 정리를 이용하여 다음 이산 주기 신호의 전력을 계산하라.

(a) $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{3}n) - \sin(\frac{2\pi}{7}n)$

Ans) $X_3 = j\frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad X_7 = \frac{1}{2}$

파스발의 정리를 적용하면 다음과 같이 전력을 구할 수 있다.

$$P = X_0 + \sum_{k=1}^{10} 2|X_k|^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

(b) $x[n] = 1 - 4\sin(\frac{\pi}{6}n) + 2\cos(\frac{\pi}{3}n) + 6\cos(\frac{\pi}{2}n)$

Ans) $X_0 = 1, \quad X_1 = j2, \quad X_2 = 1, \quad X_3 = 3$

파스발의 정리를 적용하면 다음과 같이 전력을 구할 수 있다.

$$P = X_0 + \sum_{k=1}^5 2|X_k|^2 = 1^2 + 2(2^2 + 1^2 + 3^2) = 29$$

(c) $x[n] = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

Ans) $X_1 = -j = 1e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad X_7 = -j = 1e^{-j\frac{\pi}{2}} = X_5^*$

파스발의 정리를 적용하면 다음과 같이 전력을 구할 수 있다.

$$P = X_0 + \sum_{k=1}^5 2|X_k|^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4$$

(d) $x[n] = (0.5)^{|n|}, \quad -2 \leq n \leq 3, \quad N=6$

Ans) $X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{6} \sum_{n=-2}^3 (0.5)^{|n|} e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + 1 + (-1)^k \frac{1}{8} \right)$

$$X_0 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{16}$$

$$X_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{16}$$

$$X_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{16}$$

$$X_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + 1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{16}$$

$$X_4 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{16}$$

$$X_5 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{16}$$

파스발의 정리를 적용하면 다음과 같이 전력을 구할 수 있다.

$$P = \sum_{k=0}^5 |X_k|^2 = \frac{1}{16^2} (7^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2) = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}$$

[응용 문제]

11.11 다음과 같은 이산 주기 신호의 이산 시간 푸리에 급수를 구하라.

(a) $x[n] = \begin{cases} 1, & n = \text{짝수} \\ 0, & n = \text{홀수} \end{cases}$

Ans) 신호의 주기는 $N=2$, 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \pi$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^1 X_k e^{jk\pi n}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 x[n] e^{-jk\pi n} = \frac{1}{2}$$

$$X_0 = X_1 = \frac{1}{2}$$

(b) $x[n] = \begin{cases} +1, & n = \text{짝수} \\ -1, & n = \text{홀수} \end{cases}$

Ans) 신호의 주기는 $N=2$, 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \pi$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^1 X_k e^{jk\pi n}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 x[n] e^{-jk\pi n} = \frac{1}{2} (1 - e^{-jk\pi})$$

$$X_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-j0\pi}) = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-j\pi}) = 1$$

(c) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-mN]$

Ans) 주기 N , 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \left(\delta[n] e^{-jk\Omega_0 0} + \sum_{n=1}^{N-1} 0 e^{-jk\Omega_0 n} \right) = \frac{1}{N}$$

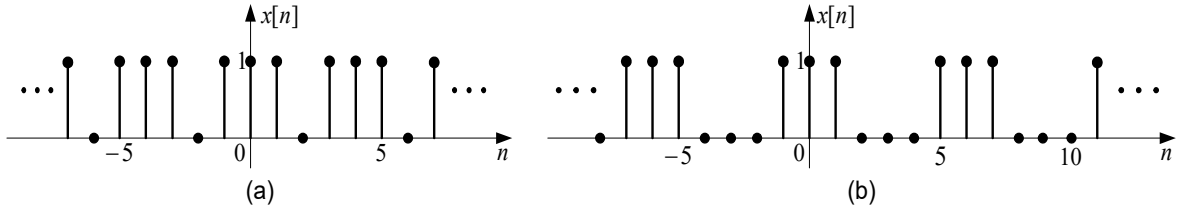
(d) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta[n+1-mN] + \delta[n-mN] + \delta[n-1-mN])$

Ans) 주기 N , 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-1}^{N-2} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} (1 + 2\cos(k\Omega_0))$$

10.12 다음 그림과 같은 이산 주기 신호에 대해서 이산 시간 푸리에 급수의 계수를 구하고, 진폭 및 위상 스펙트럼을 그려라.



(a)

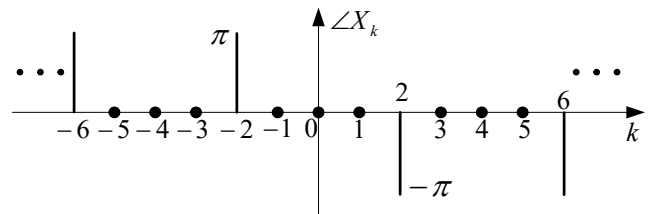
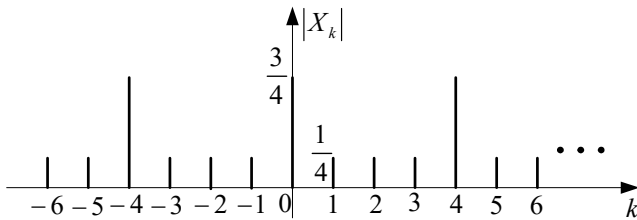
Ans) 신호의 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{4} \sum_{n=-1}^1 e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4} (1 + 2\cos(\frac{\pi}{2}k))$$

$$X_0 = \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos\frac{0\pi}{2} \right) = \frac{3}{4} \quad X_2 = \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$X_1 = \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \quad X_3 = \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos\frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{4}$$



(b)

Ans) 신호의 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

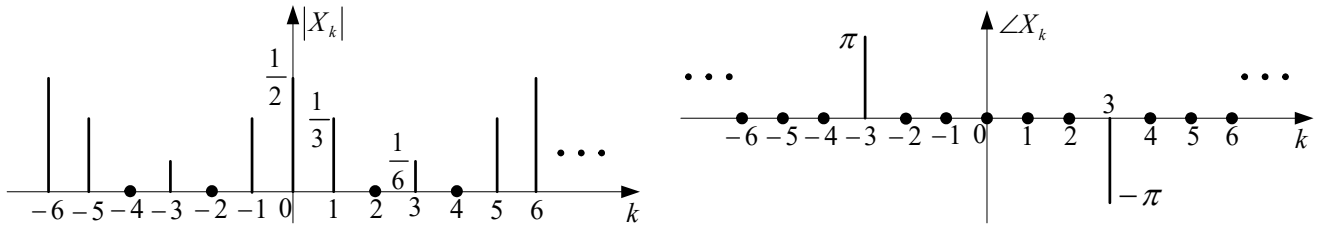
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^5 X_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{6} \sum_{n=-1}^1 e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6} (1 + 2\cos(\frac{\pi}{3}k))$$

$$X_0 = \frac{1}{6} \left(1 + 2\cos\frac{0\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \quad X_3 = \frac{1}{6} \left(1 + 2\cos\frac{3\pi}{3} \right) = -\frac{1}{6}$$

$$X_1 = \frac{1}{6} \left(1 + 2\cos\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \quad X_4 = \frac{1}{6} \left(1 + 2\cos\frac{4\pi}{3} \right) = 0$$

$$X_2 = \frac{1}{6} \left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{3} \right) = 0 \quad X_5 = \frac{1}{6} \left(1 + 2\cos\frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{3}$$



10.13 다음 각 경우에 주기 $N=8$ 인 이산 주기 신호의 DTFS 계수가 주어져 있다. 이에 대응하는 신호 $x[n]$ 을 구하라.

(a) $X_k = \delta[k+3] + 2\delta[k] + \delta[k-3], \quad -4 \leq k \leq 3$

Ans) $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} X_{-4} &= \delta[-1] + 2\delta[-4] + \delta[-7] = 0 & X_0 &= \delta[3] + 2\delta[0] + \delta[-3] = 2 \\ X_{-3} &= \delta[0] + 2\delta[-3] + \delta[-6] = 1 & X_1 &= \delta[4] + 2\delta[1] + \delta[-2] = 0 \\ X_{-2} &= \delta[1] + 2\delta[-2] + \delta[-5] = 0 & X_2 &= \delta[5] + 2\delta[2] + \delta[-1] = 0 \\ X_{-1} &= \delta[2] + 2\delta[-1] + \delta[-4] = 0 & X_3 &= \delta[6] + 2\delta[3] + \delta[0] = 1 \end{aligned}$$

$$x[n] = \sum_{k=-4}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} = e^{-j\frac{3\pi}{4}n} + 2 + e^{j\frac{3\pi}{4}n} = 2 + 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

(b) $X_k = \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right),$

Ans) $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$$X_k = \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{4}k}) + \frac{1}{j}(e^{j\frac{3\pi}{4}k} - e^{-j\frac{3\pi}{4}k}) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k} + je^{-j\frac{3\pi}{4}k} - je^{-j\frac{5\pi}{4}k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{7\pi}{4}k}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

두 식을 비교하면 다음과 같이 한 주기의 $x[n]$ 값을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x[0] &= 0 \\ x[1] &= 4 \\ x[2] &= 0 \\ x[3] &= j8 \\ x[4] &= 0 \\ x[5] &= -j8 \\ x[6] &= 0 \\ x[7] &= 4 \end{aligned}$$

(c) $X_k = (-1)^k, \quad 0 \leq k \leq 7$

Ans) $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} X_0 &= +1 & X_4 &= +1 \\ X_1 &= -1 & X_5 &= -1 \\ X_2 &= +1 & X_6 &= +1 \\ X_3 &= -1 & X_7 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \sum_{k=0}^7 X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} = 1 - e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{j\pi n} - e^{j\frac{5\pi}{4}n} + e^{j\frac{3\pi}{2}n} - e^{j\frac{7\pi}{4}n} \\
 &= (1 + (-1)^n)(1 - 2\cos(\frac{\pi}{4}n)) + 2\cos(\frac{\pi}{2}n)
 \end{aligned}$$

그런데

$$\begin{aligned}
 1 + (-1)^n &= \begin{cases} 0, & n = \text{odd} \\ 2, & n = \text{even} \end{cases} \\
 1 - 2\cos(\frac{\pi}{4}n) &= \begin{cases} 1, & n = 2, 10, 18, 26, \dots \\ 3, & n = 4, 12, 20, 28, \dots \\ 1, & n = 6, 14, 22, 30, \dots \\ -1, & n = 8, 16, 24, 32, \dots \end{cases} \\
 2\cos(\frac{\pi}{2}n) &= \begin{cases} -2, & n = 2, 6, 10, 14, \dots \\ 2, & n = 4, 8, 12, 16, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

따라서

$$x[n] = \begin{cases} 8, & n = 4, 12, 20, 28, \dots \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

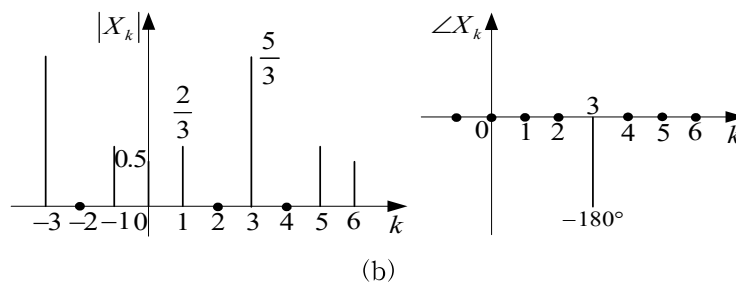
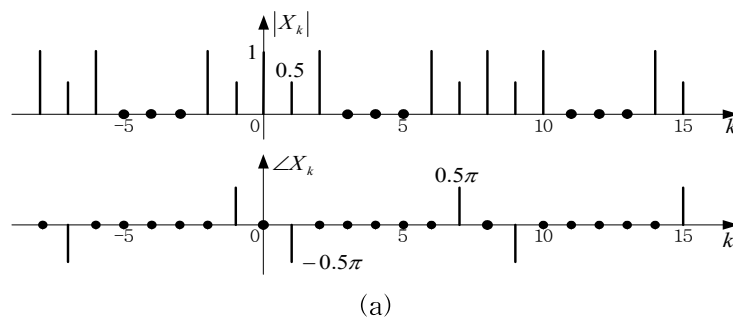
$$(d) X_k = \begin{cases} 1, & -4 \leq k \leq 3, k \neq \pm 2 \\ 0, & k = \pm 2 \end{cases}$$

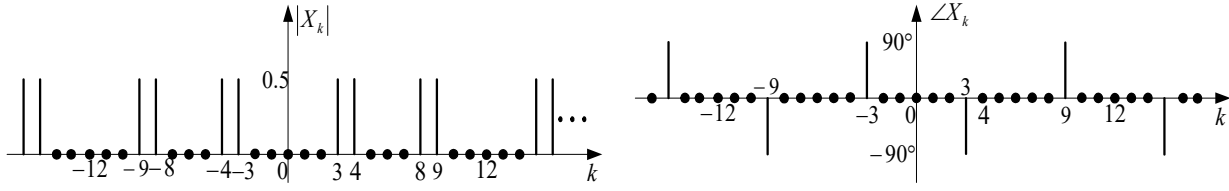
$$\text{Ans) } \Omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 X_{-4} &= 1 & X_0 &= 1 \\
 X_{-3} &= 1 & X_1 &= 1 \\
 X_{-2} &= 0 & X_2 &= 0 \\
 X_{-1} &= 1 & X_3 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \sum_{k=-4}^3 X_k e^{jk\frac{\pi}{4}n} = e^{-j\pi n} + 1 + (e^{-j\frac{3\pi}{4}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}) + (e^{-j\frac{\pi}{4}n} + e^{j\frac{\pi}{4}n}) \\
 &= (1 + (-1)^n)(1 + 2\cos(\frac{\pi}{4}n))
 \end{aligned}$$

10.14 다음 그림과 같이 스펙트럼이 주어질 때, 이로부터 대응되는 이산 신호를 구하라.





(c)

(a)

Ans) 주기 $N=8$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$|X_0|=1 \quad \angle X_0=0, \quad |X_1|=\frac{1}{2} \quad \angle X_1=-\frac{\pi}{2}, \quad |X_2|=1 \quad \angle X_2=0, \quad X_3=0, \quad X_4=0$$

$$\begin{aligned} x[n] &= |X_0|e^{j\angle X_0} + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + 2|X_2|\cos(2\Omega_0 n + \angle X_2) \\ &= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{aligned}$$

(b)

Ans) 주기 $N=6$ & 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$$X_0 = \frac{1}{2}, \quad X_1 = \frac{2}{3}, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = \frac{5}{3}e^{-j\pi}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= |X_0|e^{j\angle X_0} + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + |X_3|e^{j(3\Omega_0 n + \angle X_3)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{5}{3}e^{j(\pi n - \pi)} = \frac{1}{2} + (-1)^{n-1}\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \end{aligned}$$

(c)

Ans) 주기 $N=12$ & 기본 주파수는 $\Omega_0 = \frac{\pi}{6}$

$$X_3 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad X_4 = \frac{1}{2}, \quad X_8 = \frac{1}{2}, \quad X_9 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= 2|X_3|\cos(3\Omega_0 n + \angle X_3) + 2|X_4|\cos(4\Omega_0 n + \angle X_4) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \end{aligned}$$

10.15 주기 N 인 이산 주기 신호 $x[n]$ 의 푸리에 계수를 X_k 라고 할 때, 다음에 주어진 신호의 푸리에 계수를 X_k 로 나타내라.

(a) $y[n] = x[n - n_0]$

Ans) 시간 이동 성질에 따라

$$\therefore Y_k = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k} X_k$$

(b) $y[n] = x[-n]$

Ans) 푸리에 변환 정의식으로부터 $y[n] = x[-n]$ 의 푸리에 계수는

$$\therefore Y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[-n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(-n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n} = X_{-k}$$

(c) $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Ans) 시간 이동 성질에 따라 $x[n-1]$ 의 푸리에 계수는 $e^{-j\frac{2\pi}{N}k} X_k$ 이다.

$$\therefore Y_k = X_k - e^{-j\frac{2\pi}{N}k} X_k = (1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}) X_k$$

(d) $y[n] = x[n] - x[n - \frac{N}{2}]$ (N =짝수)

Ans) 시간 이동 성질에 따라 $x[n - N/2]$ 의 푸리에 계수는 $e^{-j\pi k} X_k$ 이다.

$$\therefore Y_k = (1 - e^{-j\pi k}) X_k = (1 - (-1)^k) X_k$$

(e) $y[n] = x[n] + x[-n]$

Ans) 푸리에 변환 정의식으로부터 $x'[n] = x[-n]$ 의 푸리에 계수는

$$X'_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[-n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(-n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(-k)n} = X_{-k}$$

$$\therefore Y_k = X_k + X_{-k}$$

(f) $y[n] = x[n] + (-1)^n x[n]$

Ans) $(-1)^n = e^{j\pi n}$ 이므로 $x'[n] = (-1)^n x[n]$ 의 푸리에 계수는

$$X'_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{j\pi n} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(k - \frac{N}{2})n} = X_{k - \frac{N}{2}}$$

$$\therefore Y_k = X_k + X_{k - \frac{N}{2}}$$